

# Modelamiento de Préstamos de Valores

*Matheus R. Grasselli<sup>a</sup>, Cesar Augusto Gomez<sup>b</sup>*

Email: grasselli@math.mcmaster.ca, cagomez6@unal.edu.co

a. *Department of Mathematics and Statistics, McMaster University  
Hamilton, Ontario, Canada.*

b. *Escuela de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia, sede Medellín.*

## Resumen

En esta comunicación exponemos un modelo matemático para préstamos de valores cuando un activo con un precio estocástico como una acción es puesto como garantía, tratamos el caso de un mercado imperfecto para el tipo de préstamos analizados en el trabajo publicado en el 2007 [1] *Stock Loans*. Usamos una utilidad exponencial y la correspondiente aversión al riesgo del cliente (prestatario) para valorar el préstamo bajo condiciones de mercado imperfecto con la metodología de valoración por indiferencia que conlleva a un problema de optimización estocástica de difusiones con horizonte finito que no permite solución explícita. En este modelo la tarifa de servicio por el préstamo es calculada numéricamente en función del monto prestado, analizamos varios aspectos teóricos y obtenemos algunos resultados numéricos.

---

## 0.1. Introducción

En primer lugar explicaremos como funcionan los préstamos de valores que vamos a modelar recordando que nos concentraremos en aquellos productos cuyo nombre en Ingles corresponde a *Stock Loans*. En algunas ocasiones escribiremos SL para referirnos a los préstamos de nuestro interés. Esta comunicación es un extracto del trabajo en desarrollo realizado por los mismos autores en [5].

Siguiendo la introducción en [1] consideramos el caso de un cliente (prestatario) quien posee una acción y obtiene un préstamo de un banco (prestador) , el cliente deja la acción en el banco como garantía del préstamo, el cliente puede recuperar la acción a cualquier momento antes de una fecha fijada en los términos del contrato pagando al banco el monto prestado (monto principal) más intereses, el cliente también puede renunciar a la acción y permanecer con el dinero prestado en cuyo caso el banco se apropiará de la acción, estos préstamos se denominan en ingles *Stock Loans* y constituyen un producto financiero bastante común ofrecido por bancos y otras instituciones financieras <sup>1</sup>. Un tal préstamo puede ayudar a inversionistas con posiciones de gran volumen en el mercado a cumplir varios objetivos, ante todo este préstamo crea liquidez al evitar obstáculos como costos de transacción y restricciones de control en las ventas de acciones. Segundo, sirve como un instrumento de cobertura contra caídas del mercado. Así también un agente en posesión de acciones y con limitaciones de capital puede entrar en un SL para acceder a algún capital sin necesidad de vender las acciones además de beneficiarse de las posibles subidas de la acción que pueden ser recuperadas pagando el monto principal y los intereses. La principal pregunta que surge de inmediato consiste en cuales son los valores justos del monto principal (prestado), los intereses del préstamo y la tarifa que cobra el banco por ofrecer este servicio?. Esta presentación está organizada de la

---

<sup>1</sup>Busque *Stock Loans* a través de Google en la internet para ver la cantidad ofrecida de estos productos.

siguiente forma, comenzamos por presentar de manera muy resumida el modelo en [1] para introducir varios aspectos técnicos del análisis de los préstamos en consideración, luego exponemos nuestro modelo junto con algunos detalles teóricos relevantes y finalizamos presentando varios resultados numéricos.

En [1] los autores usan el modelo clásico de Black-Scholes (*hipótesis de mercado completo*) para modelar las SL como una opción americana en que el strike depende del tiempo. Antes de continuar con la presentación de su modelo comentamos que la principal motivación de este trabajo consiste en desarrollar un modelo para estos préstamos bajo en las condiciones de un mercado incompleto y vencimiento finito del contrato. El caso del mercado incompleto es de importancia tanto teórica como práctica

pues bajo las hipótesis de un mercado completo como es el caso del modelo de Black-Scholes se tendría que todos los activos negociables, en particular la acción en posesión del prestatario serían perfectamente replicables por medio de algún portafolio de activos negociables del mercado lo cual implica que el propietario de la acción enfrenta un mercado líquido para la misma, en cuanto varias situaciones reales este tipo de préstamos pretenden auxiliar precisamente clientes con limitaciones para vender o negociar sus acciones, en el caso del modelo de mercado incompleto que proponemos en que el prestatario no posee acceso a la participación en portafolios que repliquen perfectamente los precios de sus acciones estando expuesto de esta forma a un riesgo sistemático (no puede cubrirse por diversificación) durante el contrato.

## 0.2. Métodos

Antes de presentar algunos de los detalles del modelo en [1], también mencionamos otro modelo para el caso completo por McDonal y Siegel [3] (vea también Dixit y Pindyck [4]).

Comenzamos a exponer en forma resumida el modelo de los autores en [1] refi-

---

riendo los lectores este interesante artículo para la revisión de los detalles.

La aleatoriedad del precio de la acción es modelada por un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  donde  $\mathbb{P}$  es la probabilidad neutra al riesgo. En este espacio de probabilidad se encuentra definido un movimiento Browniano estándar  $\{W_t\}_{t \geq 0}$ , el precio de mercado de la acción viene modelado por un movimiento Browniano geométrico

$$S_t = S_0 \exp \left\{ (r - \delta)t + \sigma W_t + \frac{\sigma^2}{2}t \right\}, \quad t \geq 0,$$

donde  $S_0 > 0$  es el precio inicial de la acción,  $\sigma > 0$  es la volatilidad y  $\delta \geq 0$  es una tasa a la que la acción paga dividendos. Las SL a analizar siguen las siguientes especificaciones:

- En el tiempo 0 el cliente presta una cantidad  $q$  ( $q > 0$ ) en un banco dejando la acción con precio  $S_0$  como garantía mientras que el banco cobra una cantidad  $c$  ( $0 \leq c < q$ ) por el servicio, así el cliente sale del banco con una cantidad  $q - c$ .
- El cliente puede recuperar a cualquier momento  $t$  su acción pagando al banco la cantidad  $qe^{\alpha t}$  donde  $\alpha$  ( $\alpha \geq 0$ ) es una tasa de interés compuesto, los dividendos de la acción son recolectados por el banco hasta que el cliente la recupere.
- El cliente no está obligado a recurrar la acción. La principal cuestión consiste en la determinación de valores para  $c$  y  $\alpha$  en función de  $q$ .

De acuerdo con [1] el problema puede ser planteado de la siguiente manera, el cliente compra por  $S_0 + c - q$  una opción americana con un premio al momento de ejercicio de  $(S_t - qe^{\alpha t})^+$ , aquí  $(x)^+$  denota la función  $\max\{0, x\}$ .

Tomando  $t_0 = 0$  el inicio del contrato, si  $f(S_0)$  denota el precio de esta opción se tiene como es bien sabido que

$$f(S_0) = \sup_{\tau \in \mathcal{T}_0} \mathbb{E} \left[ e^{-r\tau} (S_\tau - qe^{\alpha\tau})^+ \mid S_0 \right], \quad (1)$$

---

donde  $\mathcal{T}_0$  es un conjunto apropiado de tiempos de parada  $\tau$ .

Como el cliente compra por  $S_0 + c - q$  esta opción, para un determinado valor de  $S_0$  en cualquier instante que consideramos como inicial, los valores justos de los parámetros  $c$ ,  $\alpha$  y  $q$  han de satisfacer entonces la ecuación

$$S_0 + c - q = f(S_0), \quad (2)$$

Uno de los resultados más importantes de Xia y Zhou [1], consiste en la obtención de la siguiente fórmula explícita para la esperanza que caracteriza a  $f(S_0)$  en (1)

$$f(S_0) = \frac{(\kappa - 1)^{\kappa-1}}{\kappa^\kappa} q^{1-\kappa} S_0^\kappa, \quad (3)$$

donde  $\kappa := \frac{2(\alpha-r)}{\sigma^2}$ , la fórmula (3) es válida en la región de parámetros  $\alpha > r + \frac{\sigma^2}{2}$  y  $q > \frac{(\kappa-1)}{\kappa} S_0$  donde además  $\kappa > 1$ . Incluyendo este cálculo en (2) y despejando para  $c$  obtenemos

$$c = \frac{(\kappa - 1)^{\kappa-1}}{\kappa^\kappa} q^{1-\kappa} S_0^\kappa - S_0 + q, \quad (4)$$

esta última ecuación relaciona los parámetros  $q$ ,  $c$  y  $\alpha$  permitiendo calcular el valor de la tarifa cobrada por el banco  $c$  para prestar  $q$  con una tasa de intereses  $\alpha$  cuando la acción dejada por el cliente en el banco como garantía posee un precio de  $S_0$ . En la siguiente sección presentaremos un modelo para estos préstamos en el caso de un mercado incompleto.

### 0.2.1. El modelo de mercado imperfecto, vencimiento finito

Nuestra formulación se inspira en el trabajo sobre opciones de inversión en mercados incompletos por V. Henderson [2].

Este modelo considera el impacto de 3 parámetros adicionales que son una correlación  $\rho$ , la aversión al riesgo del prestatario  $\gamma$  y un tiempo finito de vencimiento del contrato  $T$ , no se pueden obtener fórmulas explícitas y por tanto se debe acceder a los resultados mediante métodos numéricos, el principal interés consiste en estudiar el impacto de los anteriores parámetros sobre los valores de las tarifas

---

asociadas a diferentes préstamos y comparar con los resultados obtenidos por el modelo de mercado completo. Consideramos ahora un mercado compuesto por dos activos correlacionados  $S$  y  $V$  con precios descontados dados por

$$dS_t = (\mu_1 - r)S_t dt + \sigma_1 dW_t^1 \quad (5)$$

$$dV_t = (\mu_2 - r)V_t dt + \sigma_2(\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2),$$

para  $t_0 \leq t \leq T < \infty$ , donde  $W = (W^1, W^2)$  es movimiento Browniano estándar en dos dimensiones. Suponemos que un agente negocia dinámicamente Manteniendo  $H_t$  unidades del activo  $S_t$  e invirtiendo el resto de su capital en una cuenta bancaria con una valor normalizado  $B_t = e^{r(t-t_0)}$  para una tasa de interés constante  $r$ . Así el valor descontado del correspondiente portafolio autofinanciado del agente satisface

$$dX_t^\pi = \pi_t(\mu_1 - r)dt + \pi_t \sigma_1 dW_t^1, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

donde  $\pi_t = H_t S_t$ . Al tiempo  $t_0$ , el agente presta una cantidad  $q$  en el banco dejando el activo con valor  $V_{t_0}$  como garantía, asumimos que el banco recolecta los dividendos pagados por el activo  $V_t$  a una tasa  $\delta$  durante la duración del préstamo. Además el banco cobrará una tarifa  $c$  y fija una tasa de interés  $\alpha$  sobre el valor del préstamo  $q$ , el cliente puede recuperar el activo  $V$  con valor  $e^{r(t-t_0)}V_t$  para el momento  $t$ , pagando al banco  $qe^{\alpha(t-t_0)}$ . Al tiempo de vencimiento  $T$  asumimos que el agente debe decidir entre pagar el préstamo o renunciar al activo  $V$  indefinidamente. Así al comienzo del préstamo el agente deja en el banco un activo con valor  $V_{t_0}$  y recibe un monto neto de  $q - c$  más la opción de comprar por  $qe^{\alpha(t-t_0)}$  de vuelta el activo  $V$  a cualquier tiempo  $t$  antes del vencimiento donde el activo tendrá el valor  $e^{r(t-t_0)}V_t$ . Denotando el costo de esta opción calculado por el banco por  $C_{t_0}$ , tenemos que los parámetros del préstamo están relacionados por

$$c = q + C_{t_0} - V_{t_0}. \quad (7)$$


---

Asumimos que  $T < \infty$ . En este modelo de mercado incompleto el prestatario y el banco asignan un valor a la opción para recobrar el activo  $V$  que no necesariamente es igual para ambos, por supuesto el precio será finalmente establecido por el banco pero este tendrá en cuenta el hecho de que el cliente puede ejercer la opción para recuperar  $V$  en cualquier momento antes del vencimiento, por lo que el banco debe incorporar en su modelo de valoración algún tipo de información sobre el momento de ejercicio de la opción por parte del cliente. Primero resolvemos el problema de valoración de la opción por parte del cliente, parte de la solución vendrá como una curva  $V^*(t)$  que determina el momento óptimo para el prestatario ejercer la opción como el primer momento en que el valor del activo  $V$  toca dicha curva. Utilizamos valoración por indiferencia para calcular el precio de la opción según el cliente, la metodología consiste en considerar 2 problemas de maximización de utilidad, en el primer escenario consideramos el mejor desempeño (mayor utilidad) que puede tener un agente que solo invierte en el activo  $S$  que puede representar de forma general al mercado, en el segundo escenario consideramos un agente que además de invertir en el activo  $S$  realiza el préstamo en el banco adquiriendo la opción de recobrar el activo  $V$  dejado como garantía. El precio por indiferencia de la opción será el valor que hace con que en ambos escenarios el agente consiga la misma utilidad máxima, a continuación desarrollaremos estas ideas en más detalle. Para este modelo utilizaremos una utilidad exponencial  $-e^{-\gamma x}$ , consideramos luego un agente que maximiza la utilidad del valor de su capital descontado  $X_t^\pi$ . Al momento  $\tau$  de pagar de vuelta el préstamo al banco el cliente recibe  $(e^{r\tau}V_\tau - qe^{\alpha\tau})$  que son descontados y suman instantáneamente  $(V_\tau - q^{(\alpha-r)\tau})$  al capital descontado. Así habiendo tomado el préstamo en el instante  $t_0$  el cliente necesita resolver el problema de optimización

$$u(t_0, x, v) = \sup_{(\tau, \pi) \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[M(\tau, X_\tau^\pi + (V_\tau - q)^+) | X_{t_0}^\pi = x, V_{t_0} = v]. \quad (8)$$

aquí los pares  $(\tau, \pi)$  están formados por un tiempo de parada  $\tau$  y un proceso

---

$\pi$  que representa el capital invertido en  $S$  y al cual nos referimos como una estrategia de inversión.  $M(t, x)$  es la función

$$M(t, x) = \sup_{\pi \in \mathcal{A}_{[t, T]}} \mathbb{E}[-e^{-\gamma X_T^\pi} | X_t^\pi = x] = -e^{-\gamma x} e^{-\frac{(\mu_1 - r)^2}{2\sigma_1^2}(T-t)}, \quad (9)$$

para  $0 \leq t \leq T$ , que representa la utilidad óptima al vencimiento cuando se a invertido en  $S$  durante el intervalo de tiempo  $[t, T]$ ,  $X_t^\pi$  sigue la dinámica en (6), tanto  $\mathcal{A}$  como  $\mathcal{A}_{[t, T]}$  son conjuntos de estrategias de inversión admisibles en el intervalo  $[t, T]$ , las cuales son procesos progresivamente medibles que satisfacen la condición de integrabilidad

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \pi_s^2 ds\right] < \infty. \quad (10)$$

El precio por indiferencia de la opción de recompra del activo de acuerdo con el prestatario viene dado por la cantidad  $p$  que satisface

$$M(t_0, x) = u(t_0, x - p, v). \quad (11)$$

Del principio de programación dinámica se sigue que la función  $u$  es la solución del siguiente problema de frontera libre

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \sup_{\pi} \mathcal{L}^\pi \leq 0, \\ u(t, x, v) \geq \Lambda(t, x, v), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \sup_{\pi} \mathcal{L}^\pi\right) \cdot (u - \Lambda) = 0, \end{cases} \quad (12)$$

donde

$$\mathcal{L}^\pi = \frac{\pi^2 \sigma_1^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \rho \pi \sigma_1 \sigma_2 v \frac{\partial^2}{\partial x \partial v} + \frac{\sigma_2^2 v^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} + \pi(\mu_1 - r) \frac{\partial}{\partial x} + (\mu_2 - r)v \frac{\partial}{\partial v},$$

es el generador infinitesimal de  $(X^\pi, V)$  y

$$\Lambda(t, x, v) = M(t, x + (v - qe^{(\alpha-r)(t-t_0)})^+),$$

---

<sup>2</sup>Estrictamente  $\mathcal{A}$  es un conjunto de pares ordenados  $(\tau, \pi)$ , el primero es un tiempo de parada y la segunda componente una estrategia de inversión que satisface la mencionada condición de integrabilidad.

---

es la utilidad obtenida al ejercer la opción al momento  $t$ . El problema (12) debe ser resuelto para  $(t, x, v) \in [t_0, T] \times \mathbb{R} \times (0, \infty)$  con las siguientes condiciones de frontera

$$u(T, x, v) = -e^{-\gamma[x+(v-qe^{(\alpha-r)(T-t_0)})^+]}, \quad (13)$$

$$u(t, x, 0) = -e^{-\gamma x} e^{-\frac{(\mu_1-r)^2}{2\sigma_1^2}(t-t_0)}. \quad (14)$$

Un hecho notable de acuerdo con [2] consiste en que la función  $u$  puede ser factorizada en la forma

$$u(t, x, v) = M(t, x)F(t, v)^{\frac{1}{1-\rho^2}}. \quad (15)$$

Se encuentra que el correspondiente problema de frontera libre para la función  $F(t, v)$  es

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial t} + \mathcal{L}^0 F \geq 0, \\ F(t, v) \leq \kappa(t, v), \\ \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \mathcal{L}^0 F\right) \cdot (F - \kappa) = 0, \end{cases} \quad (16)$$

donde

$$\mathcal{L}^0 = [\mu_2 - r - \rho \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \sigma_2] v \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\sigma_2^2 v^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \quad (17)$$

y

$$\kappa(t, v) = e^{-\gamma(1-\rho^2)(v-qe^{(\alpha-r)(T-t_0)})^+}.$$

El problema (16) debe resolverse para  $(t, v) \in [t_0, T] \times (0, \infty)$  sujeto a las condiciones de frontera

$$F(T, v) = e^{-\gamma(1-\rho^2)(v-qe^{(\alpha-r)(T-t_0)})^+},$$

$$F(t, 0) = 1.$$

Consecuentemente definimos la frontera óptima de ejercicio para el prestatario como la función

$$V^*(t) = \inf\{v \geq 0 : F(t, v) = \kappa(t, v)\},$$


---

y el tiempo óptimo de pago al banco como

$$\tau^* = \inf\{t : V_t = V^*(t)\},$$

observe que la frontera libre es independiente de  $X$  y  $S$ .

Se sigue entonces de la ecuación (11) y de la factorización (15) que el precio por indiferencia por el prestatario para la opción está dado por  $p = p(t_0, V_{t_0})$  donde

$$p(t, v) = -\frac{1}{\gamma(1 - \rho^2)} \log F(t, v). \quad (18)$$

Si bien también podemos escribir un problema de frontera libre para  $p(t, v)$

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial t} + \mathcal{L}^0 p - \frac{1}{2}\gamma(1 - \rho^2)\sigma_2^2 v^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2 \leq 0, \\ P(t, v) \geq (v - qe^{(\alpha-r)(t-t_0)})^+, \\ \left[\frac{\partial p}{\partial t} + \mathcal{L}^0 p - \frac{1}{2}\gamma(1 - \rho^2)\sigma_2^2 v^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)^2\right] \cdot (p - (v - qe^{(\alpha-r)(t-t_0)})^+) = 0, \end{cases} \quad (19)$$

también podemos reescribir el tiempo óptimo de ejercicio en términos de  $p(t, v)$  como

$$\tau^* = \inf_{t \in [t_0, T]} \{t : p(t, v) = (V_t - qe^{(\alpha-r)(t-t_0)})^+\}. \quad (20)$$

Una vez encontramos la frontera óptima de ejercicio  $V^*(t)$  resolviendo digamos el problema (16) numéricamente, podemos calcular el costo de la opción según el banco como el valor neutro al riesgo de una opción call de tipo barrera en  $e^{r(t-t_0)}V_t$  con strike  $qe^{\alpha(t-t_0)}$  y vencimiento  $T$  a la barrera  $e^{r(t-t_0)}V^*(t)$ . Sea entonces  $C_{t_0} = C(t_0, V_{t_0})$ , el valor de esta opción de tipo barrera tenemos que

$$C(t_0, V_{t_0}) = \mathbb{E}[(V^*(\tau^*) - qe^{(\alpha-r)(\tau^*-t_0)})^+ | V_{t_0}],$$

dado que para el banco el mercado del activo  $V_t$  posee características de un mercado completo, podemos calcular el valor de la opción  $C(\cdot, \cdot)$  mediante la ecuación de Black-Scholes

$$\frac{\partial C}{\partial t} + (r - \delta)v \frac{\partial C}{\partial v} + \frac{\sigma_2^2 v^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial v^2} = rC, \quad (21)$$


---

sobre el dominio  $\mathcal{D} = \{(t, v) : t_0 \leq t \leq T, 0 \leq v \leq V^*(t)\}$  sujeta a las condiciones de frontera

$$\begin{aligned} C(t, 0) &= 0, \quad t_0 \leq t \leq T, \\ C(t, V^*(t)) &= (V^*(t) - qe^{\alpha(t-t_0)})^+, \quad t_0 \leq t \leq T, \\ C(T, v) &= (v - qe^{\alpha(T-t_0)})^+, \quad 0 \leq v \leq V^*(T). \end{aligned} \tag{22}$$

Como hemos explicado antes el valor de la tarifa  $c$  que el banco cobrará por este servicio viene dada por

$$c = C(t_0, V_{t_0}) - V_{t_0} + q, \tag{23}$$

Antes de presentar los resultados numéricos resumiremos el método empleado para calcular los parámetros del préstamo  $c$ ,  $q$  y  $\alpha$ .

### 0.2.2. Resumen del método en el caso de un mercado incompleto

1. Primero fijamos el valor de  $\alpha$  que puede tomarse como  $\alpha = r$  o ligeramente mayor y se resuelve el problema de frontera (16) a fin de calcular la frontera óptima de ejercicio del cliente  $V^*(t)$ .
2. luego se resuelve para el valor de la opción según el banco  $C(t_0, V_{t_0})$  en (21) con condiciones de frontera (22) en el dominio  $\mathcal{D} = [t_0, T) \times (0, V^*(t))$  determinado por la frontera  $V^*(t)$  calculada en el punto anterior.
3. Finalmente los parámetros del préstamo  $c$ ,  $q$  y  $\alpha$  satisfacen

$$c = C(t_0, V_{t_0}) - V_{t_0} + q. \tag{24}$$

y se puede calcular el valor de la tarifa  $c$  para prestar  $q$  cuando la acción  $V$  posee el valor  $V_{t_0}$  en ese instante.

---

### 0.3. Ejemplo

La figura (1) ilustra los resultados en cada paso, se calculan valores de la tarifa  $c$  para varios valores iniciales de la acción  $V$ , se pretende prestar  $q = 80$  y el tiempo de vencimiento  $T = 5$  (años), el resto de los parámetros poseen los siguientes valores:  $\sigma_2 = 0.4$ ,  $\rho = 0.4$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $r = 0.05$ ,  $\alpha = 0.07$ .

(1a) exhibe la frontera óptima de ejercicio obtenida resolviendo la desigualdad variacional (16), (1b) los precios de la opción según el banco para varios tiempos  $C(t, v)$ , (1c) presenta los valores iniciales de dicha opción que son usados luego para calcular los valores de la tarifa  $c$  en función del precio  $V_0$  a través de la ecuación (24).

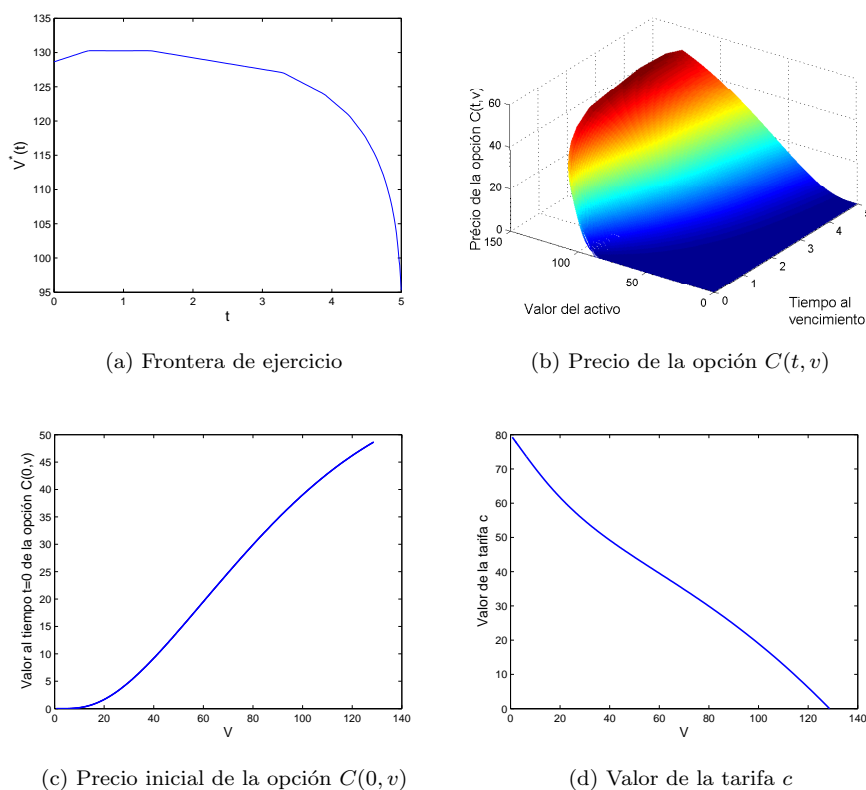


Figura 1

## Propiedades de la frontera óptima de ejercicio

En esta sección investigamos como depende la estrategia de ejercicio del prestatario con respecto a varios de los parámetros. Siempre asumiremos que la tasa de interés  $r$ , el retorno esperado  $\mu_1$ , la volatilidad  $\sigma_1$  para  $S$ , la tasa del préstamo  $\alpha$  y la cantidad prestada  $q$  son fijos. De otro lado tratamos la aversión al riesgo  $\gamma$ , la tasa de dividendos  $\delta$ , la correlación  $\rho$  entre los activos y la volatilidad  $\sigma_2$  del activo  $V$  como parámetros. Desarrollamos una estadística comparativa o sea cambiamos el valor de cada uno de estos parámetros mientras mantenemos los demás constantes y analizamos el comportamiento de la frontera óptima de ejercicio.

Por simplicidad asumimos que  $S$  es el precio descontado del *portafolio de mercado*. Al comienzo hemos supuesto que hay una tasa  $\delta$  a la cual la acción  $V$  paga dividendos, como ambos activos  $V$  y  $S$  se encuentran en equilibrio, la condición de equilibrio CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) establece que los parámetros de la dinámica que de los precios de los activos  $V$  y  $S$  deben cumplir

$$\frac{\mu_2 + \delta - r}{\sigma_2} = \rho \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}. \quad (25)$$

Observamos que cada elección de los valores para  $\delta$ ,  $\sigma_2$  y  $\rho$ , el retorno esperado  $\mu_2$  queda automáticamente determinado, pues por (25) tenemos

$$\mu_2 = \rho \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \sigma_2 + r - \delta. \quad (26)$$

En la siguiente proposición provee alguna información de como varia la frontera de ejercicio cuando se cambia el valor de algunos de los parámetros

**Proposición 1.** *La frontera óptima de ejercicio se traslada:*

1. *Hacia abajo así que la aversión al riesgo  $\gamma$  aumenta;*
  2. *Hacia abajo, así que la tasa de dividendos incrementa;*
  3. *Hacia arriba, así que la correlación absoluta  $|\rho|$  aumenta.*
-

La tabla (1) ilustra varios valores de la tarifa  $c$  para prestar  $q$  cuando el valor inicial de la acción  $S$  es  $S_0=100$ , de acuerdo con el modelo de Xia y Zhou de mercado completo [1] usando la formula

$$c = \frac{(\kappa - 1)^{\kappa-1}}{\kappa^\kappa} q^{1-\kappa} S_0^\kappa - S_0 + q, \quad (27)$$

con los siguientes valores de los parámetros:  $r=0.05$ ,  $\alpha=0.07$ ,  $\sigma =0.15$ , por tanto  $\kappa =1.7778$  y  $S_0 = 100$ .

Cuadro 1: Valores de la tarifa  $c$  para distintos valores del préstamo  $q$

$q$	50	60	70	80	90	100	110
$c$	0.7010	3.9976	9.0264	15.1764	22.0971	29.5716	37.4587

En la tabla (2) se ilustran diferentes valores de las tarifas  $c$  para prestar  $q$  en nuestro modelo de mercado incompleto, los valores de los parámetros con que se han calculado estos valores son:  $r=0.05$ ,  $\alpha=0.07$ ,  $\sigma_2 =0.3$ ,  $\rho =0.45$ ,  $\gamma =0.01$ ,  $\delta =0.05$  y  $V_0 = 100$  y el vencimiento  $T =5$  (5 años).

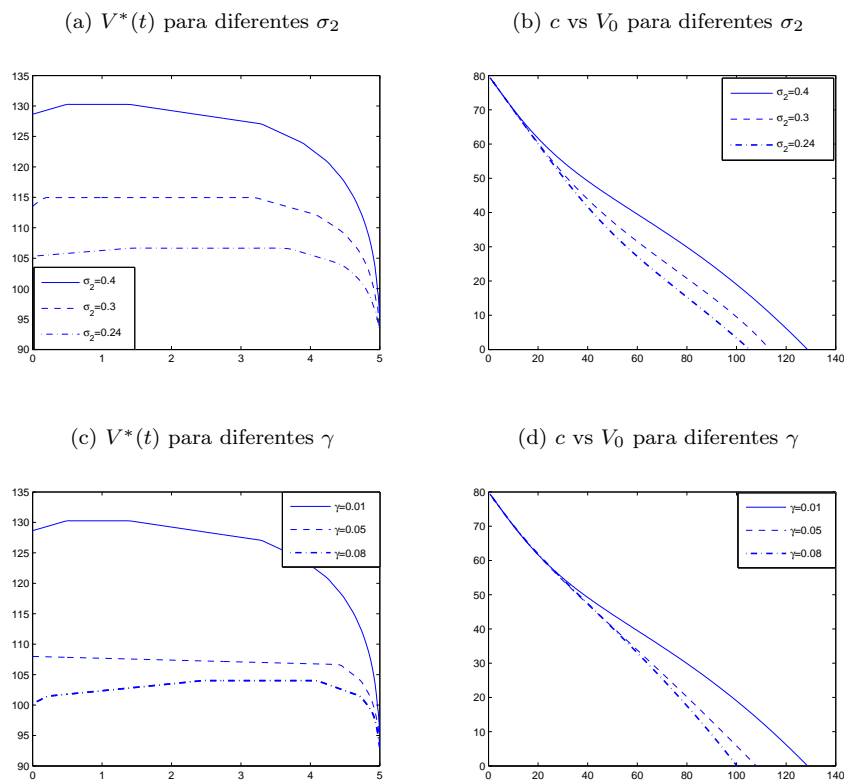
Cuadro 2: Valores de la tarifa  $c$  para distintos valores del préstamo  $q$

$q$	60	70	80	90	100	110	115
$c$	0	1.0511	9.0528	17.5727	23.8766	31.7836	35.7478

En esta sección presentamos varios resultados numéricos que ilustran la proposición [1]. Los gráficos están organizados de la siguiente forma: Primero todos los gráficos del lado izquierdo ilustran el cambio de la frontera cuando varía alguno de los parámetros  $\sigma_2$  y  $\gamma$ . Al lado derecho los gráficos ilustran los cambios en el valor de la tarifa  $c$  con respecto a cambios en los mismos parámetros. Los diferentes valores de los parámetros que cambian se encuentran en el cuadro adjunto de la correspondiente figura. En los gráficos (2a) y (2b) el resto de parámetros permanecen fijos con los siguientes valores: Monto prestado  $q = 80$ , volatilidad

---

Figura 2: Dependencia de varios parámetros



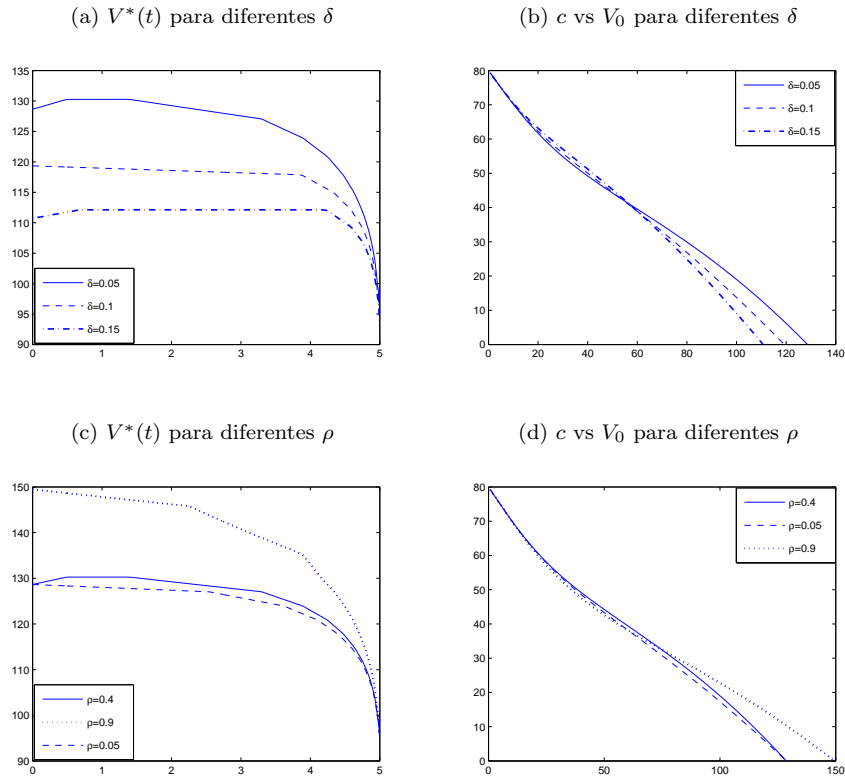
$\delta = 0.05$ , correlación  $\rho = 0.4$ , aversión al riesgo  $\gamma = 0.01$ , tasa de interés  $r = 0.05$  y tasa de interés del préstamo  $\alpha = 0.07$ .

En los gráficos (2c) y (2d) el correspondiente conjunto de valores de los parámetros que permanecen constantes son:  $q = 80$ ,  $\sigma_2 = 0.4$ ,  $\rho = 0.4$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $r = 0.05$  y  $\alpha = 0.07$ .

Al igual que en los anteriores gráficos, en la figura (3) se ilustran a la izquierda como se desplaza la frontera de ejercicio así que cambian la tasa de dividendos  $\delta$  y la correlación  $\rho$ , del lado derecho se ilustra los cambios en la curva de la tarifa  $c$  con respecto a los mismos parámetros. En los gráficos (3a) y (3b) los valores de los parámetros que permanecen constantes son:  $q = 80$ ,  $\sigma_2 = 0.4$ ,  $\rho = 0.4$ ,

---

Figura 3: Variación



$\gamma = 0.01$ ,  $r = 0.05$  y  $\alpha = 0.07$ . Los correspondientes parámetros constantes en (3c) y (3d) son:  $q = 80$ ,  $\sigma_2 = 0.4$ ,  $\delta = 0.05$ ,  $\gamma = 0.01$ ,  $r = 0.05$  y  $\alpha = 0.07$ .

## 0.4. Discusión

El modelo para los préstamos formulado incluye 3 parámetros adicionales que son: la correlación  $\rho$ , la aversión al riesgo del prestatario  $\gamma$  y un tiempo de vencimiento finito  $T$ . La impresión que se tiene al observar las tablas (1) y (2) es que los valores de la tarifa  $c$  asignados por el modelo de mercado de completo de acuerdo con [1], tienden a ser mayores que los valores obtenidos para la tarifa  $c$  en el modelo de mercado incompleto lo cual tiene sentido por que en el primer modelo el banco es más flexible con el cliente en el sentido de que el contrato posee una duración indefinida. Sin embargo hay un problema y es que ambas tablas no deben ser comparadas a todo rigor pues ambas difieren en los valores de algunos parámetros, más aún el modelo de mercado completo se restringe a una región de parámetros descrita en el parágrafo justo antes de la formula (4), también el modelo de mercado incompleto incluye 3 nuevos parámetros, las regiones de parámetros donde cada modelo es valido muy seguramente son distintas, más simulaciones serán realizadas para apreciar mejor las diferencias entre ambos modelos.

Caso los resultados de un modelo incompleto como el que proponemos difieran bastante en contraste con los del modelo de mercado completo, más práctico por tener menos parámetros, formulas explicitas pero no necesariamente más exacto, sería interesante un estudio de estimación de parámetros con base en datos reales para ver las posibilidades de implementación práctica del modelo.

### Prueba de la proposición [1]

*Demostración.* En esta prueba usamos teoremas de comparación asociados a desigualdades variacionales vease [6].

Observamos primeramente de la desigualdad central de (19) y de (20) que cuanto menor sea el valor por indiferencia  $p(t, v)$  de la opción menor es el tiempo óptimo de ejercicio lo cual implica también una frontera óptima de ejercicio menor. Para

---

establecer como el precio por indiferencia cambia con respecto a los parámetros usamos el principio de comparación para la desigualdad variacional

$$\min \left\{ -\frac{\partial p}{\partial t} - \mathcal{L}^0 p + \frac{1}{2} \gamma (1 - \rho^2) \sigma_2^2 v^2 \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)^2, p(t, v) - (v - qe^{(\alpha-r)(t-t_0)})^+ \right\} = 0, \quad (28)$$

1. Dado que el término no lineal

$$\frac{1}{2} \gamma (1 - \rho^2) \sigma_2^2 v^2 \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)^2 \quad (29)$$

es creciente en  $\gamma$ , se sigue que  $p$  es decreciente en  $\gamma$ .

2. Para este punto observe que

$$\mu_2 - r - \rho \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \sigma_2 = -\delta, \quad (30)$$

en virtud de (25), observamos ahora que  $\frac{\partial p}{\partial v} \geq 0$ , por lo que  $u(t, x, v)$  definida en (8) (y por consiguiente  $p(t, v)$ ) es una función creciente en  $v$ .

Se sigue entonces que el término

$$-\left[ \mu_2 - r - \rho \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} \sigma_2 \right] v \frac{\partial p}{\partial v} = \delta v \frac{\partial p}{\partial v} \quad (31)$$

es creciente en  $\delta$ , lo cual implica que  $p(t, v)$  es creciente en  $\delta$ .

3. Observamos primero que de acuerdo con (31) la desigualdad variacional (28) depende de  $\rho$  solo a través del término no lineal (29), por tanto el precio por indiferencia es una función simétrica de  $\rho$  y crece así que  $\rho^2$  incrementa de 0 a 1.

□

Finalmente observamos que en vista de que la desigualdad variacional (28) depende de  $\sigma_2$  a través de los términos

$$-\frac{\sigma_2^2 v^2}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial v^2} + \frac{1}{2} \gamma (1 - \rho^2) \sigma_2^2 v^2 \left( \frac{\partial p}{\partial v} \right)^2. \quad (32)$$

Dado que esta expresión no es monótona en  $\sigma_2$ , también esperamos que el precio por indiferencia no sea monótono en  $\sigma_2$ .

---

# Bibliografía

- [1] J. Xia and X. Y. Zhou. Stock loans. *Math. Finance*, 17(2):307–317, 2007.
- [2] V. Henderson. Valuing the option to invest in an incomplete market. *Math. Financ. Econ.*, 1(2):103–128, 2007.
- [3] R. McDonald, and D. R. Siegel. The value of waiting to invest, *Q. J. Econ.* 101,707–727, 1986.
- [4] A. K. Dixit, and R. Pindyck. Investment Under Uncertainty *Princeton University Press, Princeton, New jersey, 1994*
- [5] M. Grasselli, and C. A. Gomez Stock Loans in a Incomplete Market. 2009. *preprint in preparation.*
- [6] W. H. Fleming and H. M. Soner. *Controlled Markov processes and viscosity solutions*, volume 25 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer, New York, second edition, 2006.