

Una Aplicación de Estimadores Robustos de Matrices de Covarianza en Finanzas

Norman Giraldo^a, Ledwing Osorio^b, Esteban Valencia^c

a. *Prof. Asociado, Escuela de Estadística, U. Nacional de Colombia,*

Email: ndgirald@unal.edu.co

b. *Estudiante Ing. Industrial, U. Nacional de Colombia,*

Email: lgosorio@unal.edu.co

c. *Estudiante Ing. Industrial, U. Nacional de Colombia,*

Email: jevalenc@unal.edu.co

Resumen

El propósito de este trabajo es mostrar las ventajas que conlleva aplicar varios métodos de estimación robusta en la estimación de la matriz de covarianzas como parte del proceso de conformación de portafolios óptimos de inversión. Se analizaron varios portafolios óptimos tangentes, con la restricción de venta a corto, utilizando datos históricos de varios fondos de fiducia del mercado colombiano. La matriz de covarianzas de los rendimientos de estos fondos se estimó con varios métodos robustos y de encogimiento, tipo Stein. En el análisis de los rendimientos del portafolio óptimo la estimación se realizó de manera recursiva, similar a la estimación de la volatilidad en modelos GARCH, con el fin de incluir el efecto de heterocedasticidad. Se concluye que utilizar métodos robustos reduce significativamente la volatilidad del portafolio tangente frente a los métodos tipo Stein y al estimador muestral, y, además, las fronteras obtenidas con los métodos robustos presentan una menor concavidad lo que conlleva a plantear los portafolios de fiducias como vehículos de inversión adecuados para por ejemplo, la financiación de pensiones. Adicionalmente, la serie de los rendimientos del portafolio tangente presenta una dinámica con saltos, similar a la de los modelos de difusión con saltos. Los métodos de estimación y los cálculos se efectuaron en R utilizando las librerías para estimación robusta.

1. Introducción

La solución de Markowitz, [3, 6] al problema de optimización de un portafolio de inversiones es una de las herramientas básicas de finanzas cuantitativas. La fórmula de la solución es analítica pero con frecuencia produce soluciones con pesos negativos. Cuando se restringe la solución a pesos no negativos, es decir, cuando se restringe la venta a corto, se trata de un problema de programación cuadrática en el cual los elementos básicos son el vector estimado de rendimientos medios y la matriz estimada de varianzas y covarianzas de los rendimientos. Aunque se sabe que la restricción de venta a corto, que tiene una interpretación financiera, en la parte numérica conduce a reducir el efecto en la solución de algunas de las entradas de la matriz de covarianzas con mayores valores, los datos extremos de los rendimientos todavía pueden afectar significativamente la solución por el efecto que tienen en el estimador muestral de la matriz de covarianzas. Esto es particularmente evidente en el casos de los fondos de fiducia en los cuales los rendimientos presentan picos extremos positivos y negativos, debidos a liquidaciones de posiciones en el portafolio en momentos favorables o desfavorables. Por otra parte, es interesante examinar un portafolio de fondos de fiducia que viene a ser un portafolio de portafolios, o un fondo de fondos. Es factible que sea difícil obtener suficiente diversificación entre portafolios de fiducia ya que posiblemente invierten en los mismos activos y pueden tener estrategias de administración y volumen muy similares, lo cual podría conducir a rendimientos similares, planteando la posibilidad de matrices de covarianzas mal condicionadas. Sin embargo, examinar un portafolio de fiducia como un vehículo de inversión, ignorando por el momento los costos operativos (el cuatro por mil, por ejemplo), puede resultar interesante ya que si existen beneficios de la diversificación que pueden mejorarse mediante una estimación robusta y/o encogida para reducir la volatilidad, esto es más importante que buscar una maximización de los rendimientos. Porque se tendría un vehículo con el cual

financiar pensiones a largo plazo, ya que el fondo tendría rendimientos estables. La falta de estabilidad en los pesos de los portafolios que se calculan con la matriz de covarianzas muestral es otro argumento a favor de estimadores alternos ya que se sabe que tales portafolios tienen desempeño deficiente por fuera del período en el que se estimaron el vector de rendimientos medios y la matriz de covarianzas. Actualmente hay mucho interés en diseñar fondos con garantías mínimas de rendimientos a partir de inversiones con riesgo, y el resultado de este trabajo muestra que un portafolio con fiducia puede ser parte de este tipo de alternativas.

Es Pantaleo et. al (2010), [7], se realizó un trabajo similar a éste pero utilizando datos de acciones del New York Mercantile Exchange y con la estimación de la matriz de covarianzas mediante métodos de encogimiento tipo Stein de Ledoit y Wolf (2007), [5], y métodos basados en la teoría de matrices aleatorias. Hay desarrollos similares en Welsh y Zhout(2007), [12], y en DeMiguel y Nogales(2006), [1] y en las referencias de estos artículos.

Los cálculos en este trabajo se realizaron con el lenguaje R, utilizando varias librerías. La optimización de portafolios se realizó con la librería fPortfolio de RMetrics, [13], así mismo, esta librería tiene las funciones de estimación robusta y encogida (Stein). También la librería MASS implementa los métodos mcd y mve de Rousseeuw y Leroy, [8, 9] y covt de Venables y Ripley, [11]. En la librería tawny de R está implementada una función que calcula portafolios óptimos con base en estimación de la matriz de covarianzas aplicando encogimiento y teoría de matrices aleatorias, pero no es muy clara, a nuestro juicio, en el tipo de portafolio que calcula por defecto.

El artículo está organizado de la manera siguiente. En la sección 1 se introduce el problema de la optimización de un portafolio de inversiones con restricción de venta a corto, se introduce el portafolio tangente y se plantea la dependencia de la solución del problema de programación cuadrática del vector de rendimientos medios muestral y de la matriz de covarianzas muestral. En la sección 2 se

introducen los estimadores robustos utilizados en este trabajo. En la sección 3 se introducen los estimadores de encogimiento (shrunk) tipo Stein. En la sección 4 se describe el procedimiento de análisis realizado. En la sección 5 se presentan los resultados y en la sección 6 se concluye.

2. Planteamiento del Problema

Un inversionista (averso al riesgo) tiene la posibilidad de invertir hoy en el mercado colombiano en al menos 15 fondos de fiducia. Un fondo de fiducia es un portafolio que ofrece rendimientos diarios con un nivel de riesgo mucho menor que un fondo con inversión en acciones. El bajo nivel de riesgo de estos fondos se debe a que son inversiones a la vista, por lo que son muy líquidos. La fiducia tiene varias funciones, entre ellas servir como depósito temporal de excedentes de liquidez de las empresas y también la administración de reservas de pensiones. El objetivo de este trabajo es estimar un portafolio óptimo combinando inversiones en diferentes fondos de fiducia, es decir, un fondo de fondos, utilizando estimadores robustos y de encogimiento tipo Stein. Y comprobar si estos estimadores calculan una volatilidad menor para este portafolio óptimo, con relación a la que se obtiene con los estimadores muestrales ordinarios. Además interesa examinar los rendimientos de este portafolio.

El rendimiento diario del fondo i -ésimo se define como $r_i(t) = \ln U_i(t) - \ln U_i(t-1)$, $t = 1, 2, \dots$, donde $U_i(t)$ es el valor de la unidad del fondo al final del día t , $i = 1, \dots, 15$. En $t-1$ cada $r_i(t)$ es una variable aleatoria. El vector $r(t) = (r_1(t), \dots, r_{15}(t))'$ es un vector aleatorio con matriz de covarianza dada por $\Sigma(t) = [Cov(r_i(t), r_j(t))]$ y vector de rendimientos medios $u(t) = (E(r_1(t)), \dots, E(r_{15}(t)))' = (u_1, \dots, u_{15})'$.

Un portafolio es un vector de porcentajes $w = (w_1, \dots, w_{15})'$, donde w_i es el porcentaje a invertir en el fondo No i , con $0 \leq w_i \leq 1$, $\sum_{i=1}^{15} w_i = 1$. Un portafolio w óptimo se determina al inicio del período $[t-1, t]$, como la solución

del problema de programación cuadrática:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min }_{\omega} \quad \omega' \Sigma(t) \omega & (1) \\
 & \text{sujeto a : } \quad \omega' \mu(t) = \mu_p(t) \\
 & \quad \quad \quad \omega' \underline{1} = 1 \\
 & \quad \quad \quad \omega_i \geq 0, \quad \forall i.
 \end{aligned}$$

En la implementación de la solución de (1) se deben utilizar estimadores $\hat{u}(t)$ y $\hat{\Sigma}(t)$, con base en información histórica hasta t . Al reemplazar los parámetros poblacionales por sus correspondientes estimadores, la solución de (1) es un estadístico $\hat{\omega}(t)$ que depende de $\mu_p(t)$ y $\hat{\Sigma}(t)$. El valor $\mu_p(t)$ se denomina la meta de rendimiento para el portafolio, y es un valor

$$\mu_p(t) \in [\min \hat{u}_i(t), \max \hat{u}_i(t), i = 1, \dots, 15].$$

La volatilidad del portafolio solución $\hat{\omega}(t)$ se calcula como $\hat{\sigma}_{\omega}(t) = \sqrt{\hat{\omega}' \hat{\Sigma}(t) \hat{\omega}}$. Cuando se grafican los puntos $(\hat{\sigma}_{\omega}(t), \mu_p(t))$ para $\mu_p(t) \in [\min \hat{u}_i(t), \max \hat{u}_i(t)]$, se genera una curva de forma hiperbólica en el plano $(\hat{\sigma}_{\omega}(t), \mu_p(t))$, que se denomina la frontera de portafolios óptimos. En las Figuras 3, 4, pag. 13 se muestran varias fronteras. El portafolio que corresponde al vértice se denomina el portafolio de mínima varianza, $\hat{\omega}_m(t)$, cumple $\hat{\sigma}_{\omega_m}(t) = \text{Min}\{\hat{\sigma}_{\omega}(t) \mid \mu_p(t) \in [\min \hat{u}_i(t), \max \hat{u}_i(t)]\}$. Para el caso de portafolios de fiducia se cumple la restricción $\hat{\omega}_m(t)' \hat{u}(t) > 0$ ya que el promedio de los rendimientos, con base en la información hasta t , puede suponerse positivo. Pueden existir días de rendimientos negativos como se aprecia en la Figura 2, pero el promedio es positivo.

El cociente $\omega' \hat{u}(t) / \sqrt{\omega' \hat{\Sigma}(t) \omega}$, para ω cualquiera, se denomina el índice de Sharpe con tasa libre de riesgo cero. El portafolio que maximiza el índice de Sharpe se denomina el portafolio tangente, $\hat{\omega}_{\tau}(t) = \text{ArgMax}\{\omega \mid \omega' \hat{u}(t) / \sqrt{\omega' \hat{\Sigma}(t) \omega}\}$.

La porción de la frontera óptima tal que $\mu_p(t) \geq \hat{\omega}_m(t)' \hat{u}(t)$ se denomina la frontera eficiente, y los portafolios en esta frontera se denominan portafolios

eficientes. Los portafolios tangente y de mínima varianza son ambos eficientes. El teorema de dos fondos ([6], pag. 163) establece que cualquier portafolio eficiente se puede duplicar, en términos de media y varianza, como la combinación de dos cualesquiera eficientes. En particular, cualquier portafolio eficiente se puede expresar como una combinación lineal $\hat{\omega}(t) = c_1\hat{\omega}_m(t) + c_2\hat{\omega}_\tau(t)$ con la restricción $\hat{\omega}(t)' \hat{u}(t) \leq \max(\hat{u}_i(t))$. En este trabajo se calcula el portafolio tangente $\hat{\omega}_\tau(t)$ con base en estimadores robustos y de encogimiento de $\hat{\Sigma}(t)$ y se determina cuál método conduce a un menor valor de la volatilidad $\widehat{\sigma}_{\omega_\tau}(t)$.

3. Estimadores Robustos de la Matriz de Covarianzas

No se definirá el concepto de estimador robusto, para esto remitimos a [4]. Solamente mencionamos que las matrices de covarianza y correlación son muy sensibles a datos extremos, y en presencia de éstos las varianzas tienden a inflarse y las correlaciones tienden a los valores límites. Los estimadores robustos tienen como objetivo disminuir estos efectos. Primero se examinan los estimadores robustos de la matriz de covarianza. Los utilizados en este estudio son:

1. MCD Matriz de Covarianza de Determinante Mínimo
2. MVE Estimador de Elipsoide de Volumen Mínimo
3. OGK Estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan-Kettenring
4. Covt Estimador con base en la matriz de covarianzas de una distribución t multivariada

Según Venables y Ripley(2002), [11], pag. 337, si hay n observaciones y p variables, el estimador MVE se calcula a partir de la búsqueda de las $h = (n + p + 1)/2$ observaciones determinadas por el elipsoide de mínimo volumen. Y el

MCD se determina a partir de las h observaciones cuya matriz de covarianzas tenga el menor determinante. En cada caso el estimador de localización es el promedio de estas h observaciones y el estimador de la matriz de covarianzas es la correspondiente matriz de covarianzas.

La matriz de covarianzas obtenida en cada caso se multiplica por un factor de consistencia y otro factor de corrección de sesgo para muestras finitas, para que el estimador sea consistente con el modelo normal y sea insesgado para muestra pequeñas. Adicionalmente, se refina seleccionando aquellos puntos cuya distancia Mahalanobis a la media inicial, usando la matriz de covarianzas obtenida no sea demasiado grande, y recalculando la media y la matriz de covarianzas. Sin embargo, Venables y Ripley (2002) observan, en la pag. 337: "MCD is to be preferred for its higher statistical efficiency". En R los estimadores MCD y MVE están implementados en la librería MASS, con la función `cov.rob`.

El estimador de Covarianza con base en una t multivariada estima la matriz de covarianzas asumiendo que los datos tienen una distribución t multivariada, con lo cual, según Venables and Ripley (2002), [11], pag. 337, se provee algún grado de robustez a los datos extremos. Está implementado en la librería MASS en la función `cov.trob`. En la Figura 1 del pag. 8 se puede apreciar un diagrama de dispersión de los rendimientos de las fiducias de Previsora (eje x) y Bogotá (eje y) durante el período de tiempo de 2000 a 2009.

En el estimador Ortogonalizado de Gnanadesikan-Kettenring, introducido en [2], la idea para estimar la covarianza entre dos variables Y_1 y Y_2 se basa en la identidad:

$$\sigma_{1,2} = Cov(Y_1, Y_2) = (1/4)(Var(Y_1 + Y_2) - Var(Y_1 - Y_2)).$$

Un estimador robusto de $\sigma_{1,2}$, $s_{1,2}^*$ se puede obtener de

$$s_{1,2}^* = \frac{1}{4}(s_1^* - s_2^*),$$

donde s_1^* y s_2^* son dos estimadores robustos de $Var(Y_1 + Y_2)$ y $Var(Y_1 - Y_2)$, por ejemplo, las varianzas muestrales de muestras de las que se recorta una

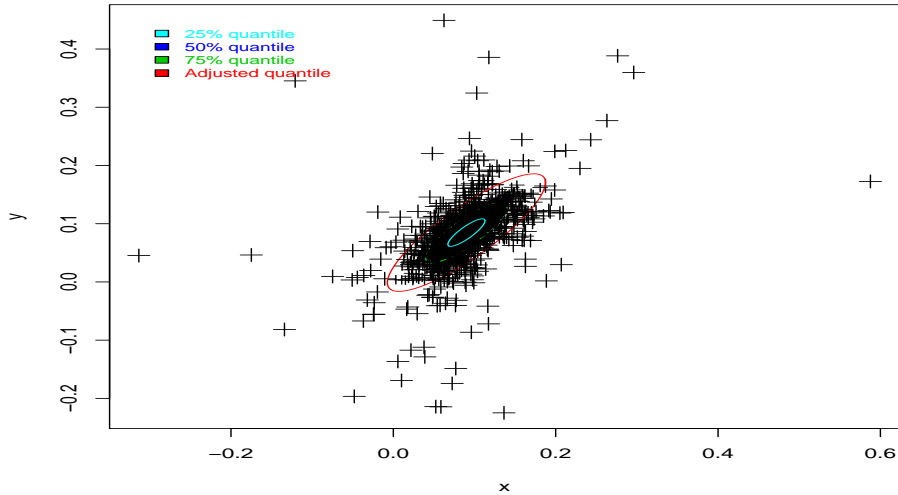


Figura 1: Diagrama de Dispersión de rendimientos de dos fiducias

proporción α de los datos más extremos. En R el estimador está implementado en la librería fAssets, en la función `assetsMeanCov`.

4. Estimadores de Encogimiento (Shrunked) para la matriz de Covarianzas

Los estimadores de encogimiento ó estimadores de Stein se utilizan en el caso de la matriz de covarianzas estar mal condicionada. Es conveniente recordar algunos conceptos relacionados.

Una matriz simétrica A , con valores propios λ_i , es definida positiva si $\forall i, \lambda_i > 0$. El número condicional de una matriz A se define como $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$, donde $\|\cdot\|$ es la norma de Frobenius, que cumple para el caso de A simétrica $\|A\|^2 = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p A_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^p \lambda_i^2$. En este caso de simetría se cumple $\kappa(A) = \lambda_{max}/\lambda_{min}$. Una matriz mal condicionada tiene un número condicional muy

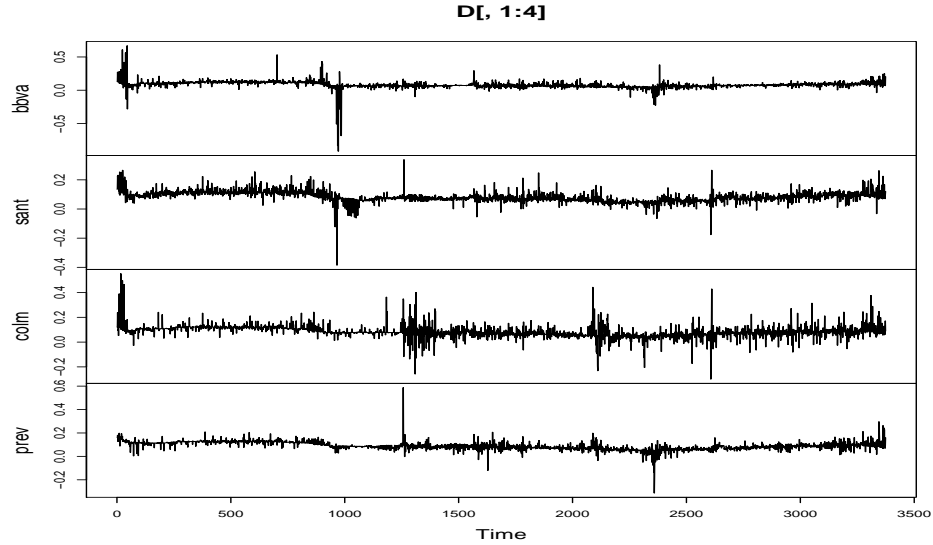


Figura 2: Series de Tiempo de los Rendimientos Diarios de cuatro Fiducias

grande, y es casi singular.

Si la matriz de covarianzas estimada $\widehat{\Sigma}(t)$ está mal condicionada, el portafolio óptimo $\widehat{\omega}$ puede afectarse por errores de muestreo en la estimación de $\widehat{\Sigma}(t)$ y $\widehat{u}(t)$. En el caso de ser $\widehat{\Sigma}(t)$ mal condicionada una alternativa consiste en reemplazarla por un estimador de encogimiento, definido como

$$\widetilde{\Sigma}(t) = \lambda G + (1 - \lambda)\widehat{\Sigma}(t). \quad (2)$$

La matriz G se toma como un estimador alternativo de $\Sigma(t)$, definida positiva. Hay varios tipos de estimadores de encogimiento, dependiendo de cómo se escoge la matriz G . Por ejemplo, si es la matriz diagonal se produce un estimador utilizado en la regresión de borde. Otra alternativa, introducida por Ledoit y Wolf, [5] en el contexto de optimización de portafolios, es utilizar la teoría CAPM con los betas de cada acción, β_i , y la volatilidad del índice bursátil, σ_I , para definir $G_{i,j} = \beta_i\beta_j\sigma_I$. Otra opción, propuesta por [10], consiste en tomar como G el promedio de matrices de covarianza muestrales. El parámetro "intensidad de

encogimiento" λ se determina minimizando $L(\lambda) = \|\lambda G + (1-\lambda)\widehat{\Sigma}(t) - \Sigma(t)\|$. Un estimador insesgado de λ está en [10]. El cálculo del estimador de encogimiento está implementado en las librerías de R `tawny` y `corpcor`, en la función del mismo nombre `cov.shrink`. El método escogido en la librería `corpcor` consiste en tres pasos: calcula primero unas versiones encogidas de las varianzas, luego una versión encogida de las correlaciones, con encogimiento hacia la matriz identidad, y luego con estas dos produce una versión encogida de las covarianzas. Esta versión es la utilizada en este estudio.

Como se mencionó en la Introducción, los fondos de fiducia posiblemente invierten en los mismos activos y pueden tener estrategias de administración y volumen muy similares, lo cual podría conducir a rendimientos similares, planteando la posibilidad de matrices de covarianzas mal condicionadas. Esta hipótesis es la que motivó la aplicación de este tipo de estimadores.

5. Procedimiento de Análisis y Resultados

A continuación se describe el procedimiento de análisis utilizado en este estudio. Se proponen seis métodos de estimación de la matriz de covarianzas: `em` (estimador muestral), `ogk`, `mve`, `mcd`, `shrink` y `trob`, cuatro robustos y uno de encogimiento (`shrink`). Los fondos analizados fueron 15: `bbva`, `santander`, `colmena`, `previsora`, `alianza`, `popular`, `cafetera`, `valle`, `occidente`, `bogota`, `helm`, `colpatria`, `fiducolombia`, `fiduagraria`, `petrolera`. Los datos comprenden el período 01/01/2001 - 31/03/2009. Los datos se obtuvieron en la página web de la Super Intendencia Financiera de Colombia (¹).

Se realizaron dos análisis: 1) de las fronteras de portafolios óptimos según los seis métodos de estimación de la matriz de covarianzas $\Sigma(t)$ y 2) de las series de tiempo de los portafolios tangentes obtenidos con los seis métodos de estimación.

¹<http://www.superfinanciera.gov.co/Cifras/financiera/ef/sf/>

5.1. Estimación de las Fronteras de Portafolios Optimos

Se calculó una matriz de tasas efectivas diarias para los 15 fondos analizados. $[r_i(t)]$, $i = 1, \dots, 15$, $t = 1, 2, \dots, T$, con $T = 3378$ número de días hábiles entre 01/01/2000 y 31/03/2009.

Se realizaron dos estimaciones: una con los 3378 días y otra con los últimos 91 días, con el fin de analizar la estabilidad de los portafolios. Con cada una de estas dos muestras se estimaron 100 metas de rendimiento

$$u_p(j) \in [\min \hat{u}_i, \max \hat{u}_i, i = 1, \dots, 15], j = 1, \dots, 100.$$

Con cada meta $u_p(j)$ se calculó el portafolio solución de (1), $\hat{\omega}_j$, y su volatilidad $\hat{\sigma}_j$, usando cada uno de los seis estimadores de la matriz de covarianza. En total, se estimaron seis fronteras de 100 portafolios cada una, con dos grupos de datos. En cada frontera se estimó el portafolio de mínima varianza:

$$\hat{\omega}_m = \text{ArgMin}\{ \hat{\omega}_i \mid \sqrt{\hat{\omega}_i' \hat{\Sigma} \hat{\omega}_i}, i = 1, \dots, 100\} \quad (3)$$

$$\hat{\omega}_\tau = \text{ArgMax}\{ \hat{\omega}_i \mid \frac{\hat{\omega}_i' \hat{u}}{\sqrt{\hat{\omega}_i' \hat{\Sigma} \hat{\omega}_i}}, i = 1, \dots, 100\} \quad (4)$$

donde \hat{u} es el vector de rendimientos medios de los 15 fondos utilizando la información hasta t, 3378 y 91 datos, respectivamente. En el Cuadro 1 siguiente se presentan los resultados del rendimiento medio y la volatilidad de los seis portafolios tangentes, $\hat{\omega}_\tau' \hat{u}$, $\sqrt{\hat{\omega}_\tau' \hat{\Sigma} \hat{\omega}_\tau}$, para los seis métodos de estimación de $\hat{\Sigma}$.

	periodo	EM	OGK	MCD	MVE	t.rob	Shrink
rendimiento	ultimo trim	8.83	8.80	8.99	8.96	8.93	9.07
volatilidad	ultimo trim	1.18	1.01	0.84	0.78	0.75	1.54
rendimiento	completo	8.46	8.41	8.39	8.37	8.37	8.46
volatilidad	completo	2.57	2.45	2.37	2.10	1.99	2.62

Cuadro 1: Rendimiento medio y volatilidad de los Fondos Tangentes

Al examinar la Tabla 1 concluimos que el método con base en la matriz de covarianzas de una t multivariada realiza un buen trabajo de estimación, superando al estimador muestral y a los demás estimadores, aunque el estimador mve está muy cerca. Los resultados del estimador mve lo hacen preferible al mcd , en oposición a la afirmación de Venables y Ripley (2002), pag. 337: "MCD is to be preferred for its higher statistical efficiency". Las figuras (3) y (4) muestran las fronteras óptimas estimadas y la posición de los portafolios eficientes tangente y de mínima varianza. Observamos adicionalmente que la concavidad de la frontera correspondiente al método de encogimiento, en ambos casos es menor ó igual que las demás ⁽²⁾ lo cual, con el teorema de dos fondos permitiría diseñar portafolios de mayor rendimiento, por ejemplo entre 10% y 10.5% en el primer trimestre de 2009. Una conclusión adicional es que dado que el estimador de encogimiento no produce una reducción apreciable de la volatilidad, y su frontera está más cercana a la frontera del estimador muestral, entonces las matrices de covarianza muestrales no deben presentar mala condición numérica, y la hipótesis acerca de que la similitud que pueden tener los fondos en cuanto al tipo de activos y estrategias de administración puede generar matrices mal condicionadas no es cierta.

5.2. Análisis de los rendimientos de los portafolios tangentes

El análisis en esta sección se reduce a la presentación de las series de los rendimientos diarios de los portafolios tangentes, calculados utilizando los seis métodos de estimación de la matriz de covarianzas. Para el portafolio tangente $\hat{\omega}_\tau(t)$ se determina su rendimiento al final del día t como $r_p(t) = \hat{\omega}_\tau(t)'r(t)$, donde $r(t) = (r_1(t), \dots, 15)'$. La estrategia de cálculo consistió en recalculer $\hat{\omega}_\tau(t)$ cada 91 días (trimestre), durante 37 trimestres. Es decir, rebalancear el

²la segunda derivada de sigma con respecto a u tiene valor menor en cada punto del dominio que las derivadas en los otros casos

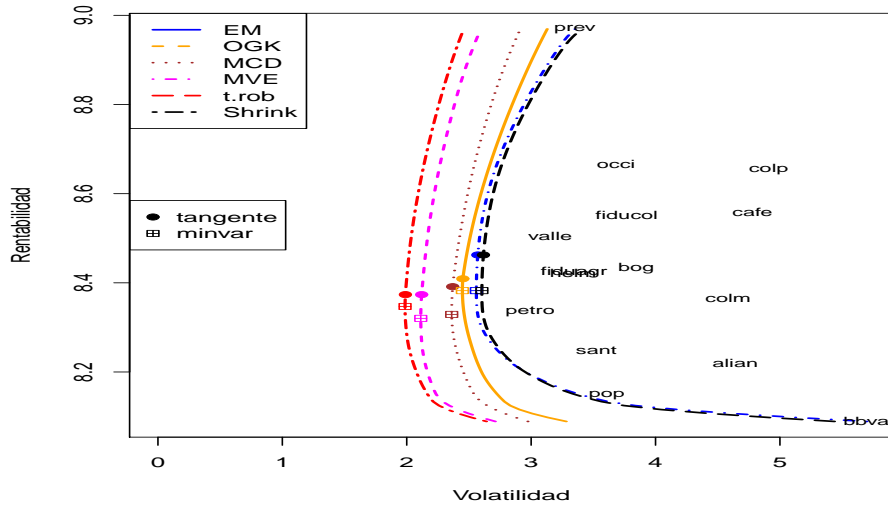


Figura 3: Fronteras óptimas para el período 2000 - 2009

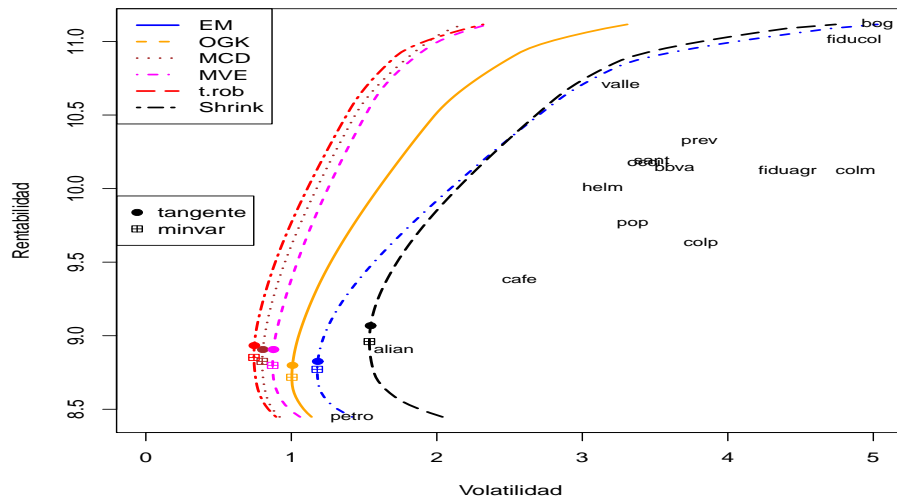


Figura 4: Fronteras óptimas para el primer trimestre 2009

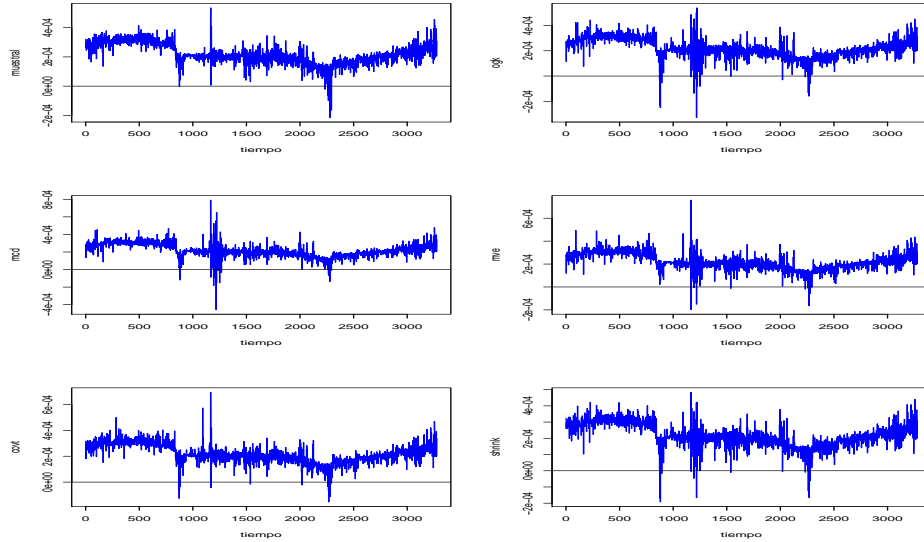


Figura 5: Series de rendimientos diarios de seis fondos tangentes

portafolio trimestralmente. Al final de cada trimestre se estimó la matriz de covarianzas de manera recursiva utilizando la matriz del trimestre inmediatamente anterior, con el fin de capturar el efecto de heterocedasticidad garch que exista en las varianzas y covarianzas. Es decir se calculó $\hat{\Sigma}_k = \alpha \hat{\Sigma}_{k-1} + (1 - \alpha) \tilde{\Sigma}_k$, donde $\tilde{\Sigma}_k$ es un estimador para el trimestre que concluye con base en uno de los seis métodos. En esta estrategia $\alpha = 0,04$, que es la recomendación de RiskMetrics para los estimadores EWMA de la varianza. El rendimiento del portafolio así calculado, $r_p(t)$ se calcula con los $r(t)$ del trimestre inmediatamente siguiente. Porque en el cálculo de los pesos ω interviene la información histórica hasta t , pero en el cálculo del rendimiento intervienen los rendimientos causados de los fondos. Las gráficas de los rendimientos estimados de seis portafolios tangentes se pueden ver en la Figura 5. Un análisis más detallado de las series está fuera de los objetivos de este trabajo, aunque resulta evidente que las series tienen inestabilidad estructural. Según el análisis de la primera parte, la serie correspondiente al método “trob” es la que muestra resultados óptimos en

cuanto a volatilidad.

6. Conclusiones

1. A partir de este estudio se puede concluir que hay una ventaja evidente al utilizar estimadores robustos para la covarianza en la solución del problema de programación cuadrática (1). El efecto de su aplicación es una reducción evidente de la volatilidad y fronteras eficientes con menor concavidad.
 2. Como se mencionó en la Introducción, los fondos de fiducia posiblemente invierten en los mismos activos y pueden tener estrategias de administración y volumen muy similares, lo cual podría conducir a rendimientos similares, planteando la posibilidad de matrices de covarianzas mal condicionadas. Esta hipótesis no resultó cierta ya que el estimador de encogimiento no presentó una mejora significativa de la volatilidad del portafolio tangente con respecto a los demás métodos.
 3. Los rendimientos del portafolio tangente muestran una dinámica con inestabilidad estructural, con posibilidad de tener una componente de saltos. Es posible que a pesar de la inestabilidad estructural sea posible plantear un modelo que aproxime con una serie estacionaria los rendimientos del portafolio tangente y permita calcular valores presente de pagos de pensiones.
 4. Una conclusión con respecto a la enseñanza de la teoría de portafolios. A nuestro juicio, el uso generalizado e incuestionado de Excel como herramienta exclusiva para cálculo de los pesos de los portafolios óptimos impide que se tenga conciencia de los errores en la estimación y las consecuencias que se pueden derivar de portafolios ineficientes. Además, la capacidad limitada de Excel en programación avanzada de métodos es-
-

tadísticos, por ejemplo, la estimación robusta, de tipo Stein, etc. genera poco interés en los usuarios por utilizar técnicas estadísticas que pueden mejorar significativamente los resultados.

Bibliografía

- [1] DeMiguel, V. and Nogales, F.J. (2006) *Portfolio selection with robust estimation of risk*, Operations Research, Vol. 57, No. 3, May-June, pp. 560-577.
- [2] Gnanadesikan, R., and Kettenring, J., (1972), *Robust Estimates, Residuals, and Outlier Detection with Multiresponse Data*, Biometrics, 28, p. 81-124.
- [3] Huang, Ch-F. and R. H. Litzenberger (1988), *Foundations for Financial Economics*, Prentice-Hall, Inc., New Jersey.
- [4] Jureckova, J. and Pizek, J. (2006) *Robust Statistics with R*. Chapman and Hall/CRC, Boca Ratón.
- [5] Ledoit, O. and Wolf, M., (2003), *Improved Estimation of Covariance Matrix of Stock Returns with an Application to Portfolio Selection*, Journal of Empirical Finance, 10, p. 603-621
- [6] Luenberger, D. G. (1998), *Investment Science*, Oxford University Press, New York.
- [7] Pantaleo, E., Tumminello, M., Lillo, F. and Mantegna, R. N. (2010) *When do improved covariance matrix estimators enhance portfolio optimization? An empirical comparative study of nine estimators*. Paper in arXiv, arXiv:1004.4272v1.

- [8] Rousseeuw, P. J., and Leroy, A. M. (1987), *Robust Regression and Outlier Detection*. New York: Wiley.
 - [9] Rousseeuw, P., and Driessen, K., (1999), *A Fast Algorithm for the Minimum Covariance Determinant Estimator*, *Technometrics*, 41, p. 212-223.
 - [10] Schafer, J., and Strimmer, K., (2005), *A Shrinkage Approach to Large-Scale Covariance Matrix Estimation and Implications for Functional Genomics*, *Statistical Applications in Genetics and Molecular Biology*, 4.
 - [11] Venables, W. N. and Ripley, B.D. (2002) *Modern Applied Statistics with S* Springer Verlag, Heidelberg.
 - [12] Welsh, R.E. and Zhou, X. (2007) *Application of Robust Statistics to Asset Allocation Models*, *REVSTAT Statistical Journal*, 15,(1), 97-114.
 - [13] Würtz, D., Chalabi, Y., Chen, W. and Ellis, A. (2009). *Portfolio Optimization with R/Rmetrics*. Rmetrics Association, Zurich. En el sitio www.rmetrics.org
-